تمرين هام: احسب قيمة التكامل:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \quad ; C:|z|=4 \quad , \quad f(z)=\frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$$

الجواب: $I=-2$.

تمارين على الأفكار الجديدة

❶ لتكن لدينا الدالة $f(z)=2+\frac{3}{z}$ ، والمطلوب: أوجد مقدار تغير الأرغومنت لهذا التابع عندما يرسم الدائرة $|z|=1$، ثمَّ أوجد عدد الدورات التي يدورها المتغير $\omega=f(z)$ حول نقطة الأصل.

الحل:

إنَّ مقدار تغير الأرغومنت للتابع $f(z)$ يعطى بالعلاقة:

$$\Delta_c \operatorname{Arg}(f(z))=2\pi(N-P)$$

إنَّ الدالة المعطاة تكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z}$$

ومن الواضح أنَّ أصفار الدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $2z+3=0$ أي $z=-\frac{3}{2}$ وهو صفر من الدرجة الأولى إلا أنَّه لا يقع ضمن الدائرة $|z|=1$ وبالتالي فإنَّ $N=0$ ، أما أقطاب الدالة $f(z)$ فهي $z=0$ وهو قطب من الرتبة الأولى ويقع ضمن الدائرة السابقة أي أنَّ $P=1$ ، وبالاستفادة مما سبق نجد أنَّ:

$$\Delta_c \operatorname{Arg}(f(z))=2\pi(0-1)=-2\pi$$

وبالتالي فإنَّ عدد الدورات هو :

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg}(f(z))=2\pi(0-1)=\frac{1}{2\pi}(-2\pi)=-1$$

وبما أنَّ:

$$\omega=2+\frac{3}{z} \ \Rightarrow \ \omega-2=\frac{3}{z} \ \Rightarrow \ |\omega-2|=\left|\frac{3}{z}\right|=\frac{3}{|z|}=\frac{3}{1}=3 \ \Rightarrow \ |\omega-2|=3$$

مما سبق نستنتج أنَّه عندما يدور المتغير z مرة واحدة بالاتجاه الموجب حول نقطة الأصل ليرسم الدائرة $|z|=1$, فإنَّ المتغير $\omega=f(z)$ يدور مرة واحدة أيضاً بالاتجاه السالب ليرسم الدائرة $|\omega-2|=3$.



❷ أوجد عدد أصفار الدالة $f(z)=2z^5-6z^2+z+1$ في الحلقة $1<|z|<2$.

الحل:

بفرض أنَّ N_1 هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z|=2$، و N_2 هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z|=1$ عندئذٍ فإنَّ عدد أصفار الدالة $f(z)$ في الحلقة $1<|z|<2$ هو $N=N_1-N_2$.

إيجاد عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z|=2$:

بفرض $h(z)=2z^5$ و $g(z)=-6z^2+z+1$ عندئذٍ فإنَّ:

$$\forall z\in|z|=2\Rightarrow |h(z)|=|2z^5|=2|z|^5=2(2)^5=64$$

$$\forall z\in|z|=2\Rightarrow |g(z)|=|-6z^2+z+1|\le 6|z|^2+|z|+1=6(2)^2+(2)+1=27$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=2\Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الدائرة $|z|=2$

وبما أنَّ للدالة $h(z)=2z^5$ صفر من الدرجة الخامسة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ خمسة أصفار في داخلية الدائرة $|z|=2$.

إيجاد عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z|=1$:

بفرض $h(z)=-6z^2$ و $g(z)=2z^5+z+1$ عندئذٍ فإنَّ:

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow |h(z)|=|-6z^2|=6|z|^2=6(1)^2=6$$

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow |g(z)|=|2z^5+z+1|\le 2|z|^5+|z|+1=2(1)^5+(1)+1=4$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الدائرة $|z|=1$

وبما أنَّ للدالة $h(z)=-6z^2$ صفر من الدرجة الثانية ، فإنَّ للدالة $f(z)$ صفرين في داخلية الدائرة $|z|=1$.

وبالتالي نستنتج أنَّ عدد أصفار الدالة $f(z)$ في الحلقة $1<|z|<2$ هو $N=N_1-N_2=5-2=3$.

❸ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث أنَّ: $f(z)=z^4+z^3-z-1$.

الحل:

إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=3$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=3$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$ ، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z) = z^4 + z^3 - z - 1$$

لنأخذ الدالة $h(z) = z^4$ والدالة $g(z) = z^3 - z - 1$ ومن الواضح أنَّ $f(z) = h(z) + g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |h(z)| = |z^4| = |z|^4 = (3)^4 = 81$$

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |g(z)| = |z^3 - z - 1| \le |z|^3 + |z| + 1 = (3)^3 + (3) + 1 = 31$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |h(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=3$ وبما أنَّ للدالة $h(z)=z^4$ صفر من الدرجة الرابعة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ أربعة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=3$ ، وبالتالي فإنَّ $N=4$ ، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (4-0) = 8\pi i$$



❹ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

حيث أنَّ:

$$f(z) = 2z^4 - 2z^2 - 2z + 9$$

الحل: إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=2z^4-2z^2-2z+9$$

لنأخذ الدالة $h(z)=9$ والدالة $g(z)=2z^4-2z^2-2z$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z\in|z|=3\Rightarrow\ |h(z)|=|9|=9$$

$$\forall z\in|z|=3\Rightarrow\ |g(z)|=|2z^4-2z^2-2z|\le 2|z|^4+2|z|^2+2|z|=2(1)^4+2(1)^2+2(1)=6$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow\ |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ وبما أنَّ الدالة $h(z)=9$ ثابتة فهي لا تملك أصفار، وبالتالي فالدالة $f(z)$ لا تملك أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$، وبالتالي فإنَّ $N=0$، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(0-0)=0$$



❺ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث أنَّ:

$$f(z)=9z^8+8z^7-42z^5+3z^2+3$$

الحل: إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=9z^8+8z^7-42z^5+3z^2+3$$

لنأخذ الدالة $h(z)=-42z^5$ والدالة $g(z)=9z^8+8z^7+3z^2+3$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |h(z)|=|-42z^5|=42|z|^5=42(1)^5=42$$

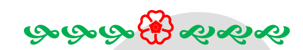
$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |g(z)|=|9z^8+8z^7+3z^2+3|\le 9|z|^8+8|z|^7+3|z|^2+3$$
$$=9(1)^8+8(1)^7+3(1)^2+3=23$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ وبما أنَّ للدالة $h(z)=-42z^5$ صفر من الدرجة الخامسة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ خمسة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ ، وبالتالي فإنَّ $N=5$ ، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=5-0=5$$



6 اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث أنَّ:

$$f(z)=z^7-4z^3+z-1$$

الحل: إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$ ، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=z^7-4z^3+z-1$$

لنأخذ الدالة $h(z)=-4z^3$ والدالة $g(z)=z^7+z-1$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |h(z)|=|-4z^3|=4|z|^3=4(1)^3=4$$

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |g(z)|=|z^7+z-1|\le|z|^7+|z|+1=(1)^7+(1)+1=3$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z|=1 \Rightarrow |h(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$

وبما أنَّ للدالة $h(z)=-4z^3$ صفر من الدرجة الثالثة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ ثلاثة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ ، وبالتالي فإنَّ $N=3$ ، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (3-0) = 6\pi i$$

❼ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

❶ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} \quad ; \quad -1<a<1$$

الحل: من أجل $a=0$ نجد أنَّ التكامل المعطى يأخذ الشكل:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{1-(0)^2}} \quad ; a=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

من أجل $a \neq 0$; $-1<a<1$ ، نفرض أنَّ $z=e^{i\theta}$; $0\le\theta\le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+a\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{(az^2+2iz-a)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{\text{Res}} f(z) \quad \cdots\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$az^2+2iz-a=0$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4(a)(-a) = -4+4a^2 = -4(1-a^2) = i^2 4(1-a^2) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\,2\sqrt{1-a^2} \; ; \; a^2<1$$

$$z_1 = \frac{-(2i)+i\,2\sqrt{1-a^2}}{2(a)} = \frac{\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a} \quad , \quad z_2 = \frac{-(2i)-i\,2\sqrt{1-a^2}}{2(a)} = \frac{-\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a}$$

ومن الواضح أنَّ:

$$|z_2| = \left|\frac{-\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a}\right| = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|} > 1 \;\; ; \;\; |a|<1 \Rightarrow \frac{1}{|a|}>1 \;,\; 1+\sqrt{1-a^2}>1$$

وبما أنَّ:

$$|z_1 . z_2| = 1 \;\Rightarrow\; |z_1|.|z_2| = 1 \;\Rightarrow\; |z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1 \;\; ; \;\; |z_2|>1$$

وبالتالي نجد أنَّ النقطة الشاذة z_2 لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، أما النقطة z_1 فهي تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، وبالتالي نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = 2\pi i\,(b_1) \;\; ; \;\; b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(\frac{2}{az^2+2iz-a}\right)$$

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(\frac{2}{az^2+2iz-a}\right) = \frac{2}{2az+2i}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{az+i}\bigg|_{z=z_1} =$$

$$= \frac{1}{a\dfrac{\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a}+i} = \frac{1}{-i+i\sqrt{1-a^2}+i} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$I = 2\pi i\,(b_1) = 2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \;\; ; \; -1<a<1 \;, a\neq 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

من (1) و (2) يتضح أنَّ:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad ; \quad -1<a<1$$

ملاحظة: يترك للقارئ بطريقة مشابهة إيجاد قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \quad ; \quad -1<a<1$

❷ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = \pi$$

الحل:

بفرض أنَّ $z=e^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \ \Rightarrow\ dz=izd\theta \ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{3-2\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left[3-\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right]}=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{6iz-2i\left(z^2+1\right)+\left(z^2-1\right)}$$

$$=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}=2\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_j}f(z)\right]\ \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\Delta=(6i)^2-4(1-2i)\left[-(1+2i)\right]=-36+4(1+4)=-36+20=-16=16i^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=4i$$

$$z_1=\frac{-(6i)+4i}{2(1-2i)}=\frac{-2i}{2(1-2i)}=\frac{-i(1+2i)}{5}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$$

$$z_2=\frac{-(6i)-4i}{2(1-2i)}=\frac{-10i}{2(1-2i)}=\frac{-5i(1+2i)}{5}=2-i$$

وبما أن:

$$|z_1|=\left|\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right|=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{5}{25}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_1=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة.

وبما أن:

$$\left|z_2\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}>1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_2=2-i$ لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، وبالتالي تصبح العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$I=2\left(2\pi i\, b_1\right)\ ;\quad b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{2-i}{5}}\left(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}\right)$$

وبما أن $z=\dfrac{2-i}{5}$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة المستكملة وبالتالي فإنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{2-i}{5}}\left(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}\right)=\frac{1}{2(1-2i)z+6i}\bigg|_{z=\frac{2-i}{5}}$$

$$\frac{5}{2\left[(1-2i)(2-i)+15i\right]}=\frac{5}{2(-5i+15i)}=\frac{1}{4i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\left(2\pi i\, b_1\right)=4\pi i\, b_1=4\pi i\,\frac{1}{4i}=\pi$$

❸ $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{3+\sin\theta}d\theta$$

الحل:

بفرض أن $0\le\theta\le 2\pi\ ;\ z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{3+\sin\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)}{iz\left(z^2+6iz-1\right)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$i\,z\left(z^2+6i\,z-1\right)=0 \;\Rightarrow\; z=0 \quad \& \quad z^2+6iz-1=0$$

$$\Delta=(6i)^2-4(1)(-1)=-36+4=-32=32i^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}i$$

$$z_1=\frac{-(6i)+4\sqrt{2}i}{2}=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i \quad , \quad z_2=\frac{-(6i)-4\sqrt{2}i}{2}=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$$

من الواضح أنَّ النقطة الشاذة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3-2\sqrt{2}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2|=\left|-\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3+2\sqrt{2}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\left(z^2-1\right)}{i\,z\left(z^2+6i\,z-1\right)}\right)=\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^2-1}{iz^3-6z^2-iz}\right)=\left.\frac{z^2-1}{3iz^2-12z-i}\right|_{z=0}=\frac{-1}{-i}=\frac{1}{i}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}\left(\frac{\left(z^2-1\right)}{i\,z\left(z^2+6i\,z-1\right)}\right)=\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^2-1}{iz^3-6z^2-iz}\right)=\left.\frac{z^2-1}{3iz^2-12z-i}\right|_{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}$$

$$=\frac{-\left(-3+2\sqrt{2}\right)^2-1}{-3i\left(-3+2\sqrt{2}\right)^2-12\left(-3+2\sqrt{2}\right)i-i}=\frac{-18+12\sqrt{2}}{\left(-3+2\sqrt{2}\right)\left[-3i\left(-3+2\sqrt{2}\right)-12i\right]-i}$$

$$=\frac{-18+12\sqrt{2}}{\left(-16+12\sqrt{2}\right)i}=\frac{-9+6\sqrt{2}}{\left(-8+6\sqrt{2}\right)i}=\frac{\left(-9+6\sqrt{2}\right)\left(-8-6\sqrt{2}\right)}{\left(-8+6\sqrt{2}\right)\left(-8-6\sqrt{2}\right)i}=\frac{6\sqrt{2}}{-8i}=-\frac{3\sqrt{2}}{4i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)=2\pi i\left(\frac{1}{i}-\frac{3\sqrt{2}}{4i}\right)=2\pi\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=2\pi-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

❹ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

الحل: بفرض أنَّ $z=e^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}=\int_{|z|=1}\frac{-2i\,dz}{z^2+4z+1}=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}}f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2+4z+1=0$$
$$\Delta=(4)^2-4(1)(1)=16-4=12\ \Rightarrow\ \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$
$$z_1=\frac{-(4)+2\sqrt{3}}{2}=\left(-2+\sqrt{3}\right)\quad,\quad z_2=\frac{-(4)-2\sqrt{3}}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)\right|=2-\sqrt{3}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)$ ، فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2|=\left|-\left(2+\sqrt{3}\right)\right|=2+\sqrt{3}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\,b_1$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\underset{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}{\operatorname{Res}}\left[\frac{-2i}{z^2+4z+1}\right]=\left.\frac{-2i}{2z+4}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}=\left.\frac{-i}{z+2}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}=\frac{-i}{-2+\sqrt{3}+2}=\frac{-i}{\sqrt{3}}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\, b_1=2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

❺ $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta=0$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \;\Rightarrow\; dz=izd\theta \;\Rightarrow\; d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\quad,\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z\left(z^2+4z+1\right)=0 \;\Rightarrow\; z=0 \;\&\; z^2+4z+1=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z^2+4z+1=0$$

$$\Delta=(4)^2-4(1)(1)=16-4=12 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$z_1=\frac{-(4)+2\sqrt{3}}{2}=\left(-2+\sqrt{3}\right)\quad,\quad z_2=\frac{-(4)-2\sqrt{3}}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)\right|=2-\sqrt{3}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)$ ، فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$\left|z_2\right|=\left|-\left(2+\sqrt{3}\right)\right|=2+\sqrt{3}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\underset{z=0}{\operatorname{Res}}\left[\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}\right]=\underset{z=0}{\operatorname{Res}}\left[\frac{1-z^2}{\left(z^3+4z^2+z\right)}\right]=\left.\frac{1-z^2}{\left(3z^2+8z+1\right)}\right|_{z=0}=1$$

$$b_2=\underset{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}{\operatorname{Res}}\left[\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}\right]=\underset{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}{\operatorname{Res}}\left[\frac{1-z^2}{\left(z^3+4z^2+z\right)}\right]=\left.\frac{1-z^2}{\left(3z^2+8z+1\right)}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(-2+\sqrt{3}\right)^2}{3\left(-2+\sqrt{3}\right)^2+8\left(-2+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{1-\left(7-4\sqrt{3}\right)}{3\left(7-4\sqrt{3}\right)+8\left(-2+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{-6+4\sqrt{3}}{-\left(-6+4\sqrt{3}\right)}=-1$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)=2\pi i\left(1-1\right)=0$$

❻ $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi\ ;\ z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{e^{2i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}{5-4\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}dz=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\right]\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2\left(2z^2-5z+2\right)=0\quad\Rightarrow\quad z=0\ \ \&\ \ 2z^2-5z+2=0$$

$$2z^2-5z+2=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$$

$$z_1=\frac{-(-5)+3}{2(2)}=2\quad,\quad z_2=\frac{-(-5)-3}{2(2)}=\frac{1}{2}$$

إنَّ النقطة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب من الرتبة الثانية كونها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z=\frac{1}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، أما النقطة الشاذة $z=2$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، منه فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]$$

$$=\lim_{z\to0}\left[\frac{-4z^3\left(2z^2-5z+2\right)+(4z-5)\left(z^4+1\right)}{\left(2z^2-5z+2\right)^2}\right]=-\frac{5}{4}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]=\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{2z^4-5z^3+2z^2}\right]=\left.\frac{-\left(z^4+1\right)}{8z^3-15z^2+4z}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{17}{12}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=\pi\left(-\frac{5}{4}+\frac{17}{12}\right)=\frac{\pi}{6}$$

❼ $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz=izd\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right) \Rightarrow \sin^2\theta=-\frac{1}{4}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2}}{5+4\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{-1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}dz=\frac{-1}{4i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\right]\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2\left(2z^2+5z+2\right)=0 \Rightarrow z=0 \ \& \ 2z^2+5z+2=0$$

$$2z^2+5z+2=0$$

$$\Delta=(5)^2-4(2)(2)=25-16=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$$

$$z_1=\frac{-(5)-3}{2(2)}=-2 \quad , \quad z_2=\frac{-(5)+3}{2(2)}=-\frac{1}{2}$$

إنَّ النقطة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب من الرتبة الثانية كونها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z=-\frac{1}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، أما النقطة الشاذة $z=-2$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، ومنه فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\underset{z=0}{\text{Res}}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{4z\left(z^2-1\right)\left(2z^2+5z+2\right)-\left(4z+5\right)\left(z^2-1\right)^2}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}\right]=-\frac{5}{4}$$

$$b_2=\underset{z=-\frac{1}{2}}{\text{Res}}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]=\underset{z=-\frac{1}{2}}{\text{Res}}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^4+5z^3+2z^2}\right]=\left.\frac{\left(z^2-1\right)^2}{8z^3+15z^2+4z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=\frac{-1}{4i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

8 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

الحل: بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}=\int_{|z|=1}\frac{2\,dz}{z^2+4iz-1}=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\text{Res}}\,f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2+4iz-1=0$$

$$\Delta=\left(4i\right)^2-4(1)(-1)=-16+4=-12=12i^2\ \Rightarrow\ \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$$

$$z_1=\frac{-(4i)+2\sqrt{3}i}{2}=\left(-2+\sqrt{3}\right)i\quad,\quad z_2=\frac{-(4i)-2\sqrt{3}i}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)i$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$\left|z_1\right|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)i$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$\left|z_2\right|=\left|-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\underset{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i}{\operatorname{Res}}\left[\frac{2}{z^2+4iz-1}\right]=\left.\frac{2}{2z+4i}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i}=\left.\frac{1}{z+2i}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\, b_1=2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{3}\,i}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

9 $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin\theta}\,d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

الحل: بفرض أنَّ $z=e^{i\theta}\;;\;0\le\theta\le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\;\Rightarrow\;dz=izd\theta\;\Rightarrow\;d\theta=\frac{dz}{i\,z}\quad,\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{i\,z}}{5+4\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{5iz+2\left(z^2-1\right)}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+5iz-2}=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$2z^2+5iz-2=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\Delta=(5i)^2-4(2)(-2)=-25+16=-9=9i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3i$$

$$z_1=\frac{-(5i)+3i}{2(2)}=\frac{-2i}{4}=-\frac{i}{2} \quad , \quad z_2=\frac{-(5i)-3i}{2(2)}=\frac{-8i}{4}=-2i$$

وبما أن:

$$|z_1|=\left|-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_1=-\frac{i}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة.

وبما أن:

$$|z_2|=|-2i|=2>1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_2=-2i$ لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، وبالتالي تصبح العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$I=2\pi i\, b_1 \quad ; \quad b_1=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2z^2+5iz-2}\right)$$

وبما أنَّ النقطة الشاذة $z=-\frac{i}{2}$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة المستكملة وبالتالي فإنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2z^2+5iz-2}\right)=\left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-\frac{i}{2}}=\frac{1}{-2i+5i}=\frac{1}{3i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=(2\pi i\, b_1)=2\pi i\,\frac{1}{3i}=\frac{2\pi}{3}$$

❿ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13-12\cos 2\theta}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz=izd\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{e^{2i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13-12\cos 2\theta}=\int_{|z|=1}\frac{1}{13-12\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{1}{13-6\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^3}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}dz=-\frac{1}{i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\right]\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$6\left(z^2\right)^2-13z^2+6=0\quad\Rightarrow$$

$$\Delta=(-13)^2-4(6)(6)=169-144=25\Rightarrow\sqrt{\Delta}=5$$

$$(z_1)^2=\frac{-(-13)+5}{2(6)}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6}\quad,\quad(z_2)^2=\frac{-(-13)-5}{2(6)}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$$

وبالتالي فإنَّ الجذور الأربعة التي تمثل النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي:

$$(z_1)^2=\frac{-(-13)+5}{2(6)}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6}\quad,\quad(z_2)^2=\frac{-(-13)-5}{2(6)}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$$

$$z=\frac{3}{\sqrt{6}}\ ,\ z=-\frac{3}{\sqrt{6}}\ ,\ z=\frac{2}{\sqrt{6}}\ ,\ z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

ومن الواضح أنَّ النقطتين الشاذتين $z=\frac{3}{\sqrt{6}}\ ,\ z=-\frac{3}{\sqrt{6}}$ لا تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\frac{3}{\sqrt{6}}\right|=\left|-\frac{3}{\sqrt{6}}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}}>1$$

أما النقطتان $z=\frac{2}{\sqrt{6}}\ ,\ z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|=\left|-\frac{2}{\sqrt{6}}\right|=\frac{2}{\sqrt{6}}<1$$

وكل منهما هي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=-\frac{1}{i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=-2\pi\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1 = \underset{z=\frac{2}{\sqrt{6}}}{\text{Res}}\left[\frac{z^3}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}\right] = \left.\frac{z^3}{24z^3-26z}\right|_{z=\frac{2}{\sqrt{6}}} = \left.\frac{z^2}{24z^2-26}\right|_{z=\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{\frac{4}{6}}{24\left(\frac{4}{6}\right)-26} = -\frac{2}{5}$$

$$b_2 = \underset{z=-\frac{2}{\sqrt{6}}}{\text{Res}}\left[\frac{z^3}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}\right] = \left.\frac{z^3}{24z^3-26z}\right|_{z=-\frac{2}{\sqrt{6}}} = \left.\frac{z^2}{24z^2-26}\right|_{z=\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{\frac{4}{6}}{24\left(\frac{4}{6}\right)-26} = -\frac{2}{5}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = -2\pi\left(-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right) = \frac{8\pi}{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta = 0$$ **(تمرين هام يترك الحل للقارئ)**

ملاحظة هامة: من الممكن وجود أخطاء مطبعية لم انتبه عليها.